VI Intégrales impropres

VI.A Questions de cours :

* Énoncer le théorème de classe $\mathcal{C}^k$ sous l'intégrale.
* Énoncer le théorème d'intégration par partie.
* Énoncer le théorème d changement de variable.

VI.B Exercices :

Exercice 1: **

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge mais ne converge pas absolument.

Exercice 2: **

Etudier la convergence de $\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3: ***

Montrer la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(3t)-\arctan(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4: *

Soit a un réel et f une application continue de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur $[a,+\infty[$.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle ;
2. Montrer que si f est uniformément continue alors elle tend vers 0 en $+\infty$;

Exercice 5: * Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable.

1. Démontrer que pour tout $A>0$ l'intégrale $\int_0^A f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x\to+\infty$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $x\to+\infty$.

Exercice 6: *

1. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n\to+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue par morceaux intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 7: * Transformée de Fourier de la Gaussienne**

On définit la Gaussienne par la fonction g suivante :

$$g(x) = e^{-ax^2}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.
Calculer $f(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$.

(*Indication : on déterminera une équation différentielle vérifiée par f.*)

Exercice 8: ****

On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt, \quad \text{pour x} > 0.$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie.
2. Montrer que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 9: * Suites de Riemann et intégrales

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.
2. On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 10: **

1. Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ pour $a > 0$.
2. Idem avec $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
3. Idem avec $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11: **

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Démontrer que $f \geqslant 0$.
2. Démontrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
3. Justifier que $\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
4. En déduire que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.